Correction du Devoir Maison 3

Partie I : lecture graphique

1. Graphiquement, sur l'intervalle $[2; 6]$ le minimum de f est d'environ $1,6$ (et est atteint pour $x = 4,2$). Sur l'intervalle $[6; 12]$, le maximum de f est d'environ $4,4$ (atteint pour $x = 9$).
2. Sur $[0; 12]$, le maximum de f est 12 (atteint en 0) et le minimum de f est 0 (atteint en 12).
3. Graphiquement on observe que

x	0		4.2		9		12
f	12	$\searrow$	1.6	$\nearrow$	4.4	$\searrow$	12

4. La fonction f semble décroissante sur $[0; 4,2] \cup [9; 12]$.
5. On trace la droite horizontale $y = 4$ et l'on regarde pour quelles valeurs de x la courbe $\mathscr{C}_f$ est-elle au dessus de la droite horizontale $y = 4$. Graphiquement l'ensemble solution semble être
$$\mathscr{S} = [0; 2] \cup [8; 10].$$

Partie II : expressions algébriques

On admet que l'expression algébrique de f est donnée pour tout $x \in [0; 12]$ par

$$f(x) = -\frac{1}{20}\left(x^2 - 10x + 16\right)(x - 10) + 4.$$

6. Si $x = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
f(0) &= -\frac{1}{20}\left(0^2 - 10 \times 0 + 16\right)(0 - 10) + 4 \\
&= -\frac{1}{20} \times 16 \times (-10) + 4 \\
&= -\frac{1}{20} \times (-160) + 4 \\
&= \frac{160}{20} + 4 \\
&= \frac{16}{2} + 4 = 8 + 4 = 12.
\end{aligned}$$

Donc $f(0) = 12$. Si $x = 6$, on a

$$\begin{aligned}
f(6) &= -\frac{1}{20}\left(6^2 - 10 \times 6 + 16\right)(6 - 10) + 4 \\
&= -\frac{1}{20}(36 - 60 + 16) \times (-4) + 4 \\
&= -\frac{1}{20}(-8) \times (-4) + 4 \\
&= -\frac{32}{20} + 4 \\
&= -\frac{16}{10} + 4 = -\frac{8}{5} + \frac{20}{5} = \frac{12}{5} = 2,4.
\end{aligned}$$

Donc $f(6) = 2,4$. Enfin, si $x = 12$, on trouve

$$\begin{aligned}
f(12) &= -\frac{1}{20}\left(12^2 - 10 \times 12 + 16\right)(12 - 10) + 4 \\
&= -\frac{1}{20}(144 - 120 + 16) \times 2 + 4 \\
&= -\frac{1}{20}40 \times 2 + 4 \\
&= -\frac{80}{20} + 4 = -4 + 4 = 0.
\end{aligned}$$

D'où $f(12) = 0$. Notez que l'on pouvait contrôler ses résultats par la lecture du graphe donné en début de sujet.

7. C'est un peu calculatoire mais sans difficulté théorique :

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{20}\left(x^2 - 10x + 16\right)(x - 10) + 4 \\
&= -\frac{1}{20}\left[x^2 \times x - x^2 \times 10 - 10x \times x + (-10x) \times (-10) + 16 \times x - 16 \times 10\right] + 4 \\
&= -\frac{1}{20}\left[x^3 - 10x^2 - 10x^2 + 100x + 16x - 160\right] + 4 \\
&= -\frac{1}{20}\left[x^3 - 20x^2 + 116x - 160\right] + 4 \\
&= -\frac{x^3}{20} + \frac{20x^2}{20} - \frac{116x}{20} + \frac{160}{20} + 4 \\
&= -\frac{x^3}{20} + x^2 - \frac{29x}{5} + 8 + 4 \\
&= -\frac{x^3}{20} + x^2 - \frac{29x}{5} + 12.
\end{aligned}$$

8. On recalcule l'image de 0, 6 et 12 à l'aide de cette nouvelle formule :

$$f(0) = -\frac{0^3}{20} + 0^2 - \frac{29 \times 0}{5} + 12 = 12.$$

L'image de 6 est

$$\begin{aligned} f(6) &= -\frac{6^3}{20} + 6^2 - \frac{29 \times 6}{5} + 12 \\ &= -\frac{36 \times 6}{20} + 36 - \frac{174}{5} + 12 \\ &= -\frac{216}{20} - \frac{174}{5} + 48 \\ &= -\frac{54}{5} - \frac{174}{5} + 48 = -\frac{228}{5} + 48 = -45,6 + 48 = 2,4. \end{aligned}$$

Et enfin l'image de 12 est

$$\begin{aligned} f(12) &= -\frac{12^3}{20} + 12^2 - \frac{29 \times 12}{5} + 12 \\ &= -\frac{144 \times 12}{20} + 144 - \frac{348}{5} + 12 \\ &= -\frac{144 \times 3}{5} - \frac{348}{5} + 156 \\ &= -\frac{432}{5} - \frac{348}{5} + 156 = -\frac{780}{5} + 156 = -156 + 156 = 0. \end{aligned}$$

9. Le skieur se situe au-dessus de 4 lorsque $f(x) \geqslant 4$. Donc en remplaçant $f(x)$ par son expression,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{20}\left(x^2 - 10x + 16\right)(x-10) + 4 \geqslant 4 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{20}\left(x^2 - 10x + 16\right)(x-10)\, 4 {\color{red}-4} \geqslant 4{\color{red}-4} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{20}\left(x^2 - 10x + 16\right)(x-10) \geqslant 0. \end{aligned}$$

On multiplie de chaque côté par -20. Or $-20 < 0$, donc on change le sens de l'inégalité :

$$\begin{aligned} f(x) \geqslant 4 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{20}\left(x^2 - 10x + 16\right)(x-10) {\color{red}\times(-20)} \leqslant 0 {\color{red}\times(-20)} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x^2 - 10x + 16\right)(x-10) \leqslant 0 \qquad \text{(E)} \end{aligned}$$

10. Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a + b = -10$ et $ab = 16$. Puisque $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$, on a $a = -16, -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8$ ou 16. Faisons un tableau pour tester ces différentes valeurs

a	-16	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8	16
b	-1	-2	-4	-8	-16	16	8	4	2	1
$a+b$	-17	-10	-8	-10	-17	17	10	8	10	17

On voit que les solutions sont alors $a = -8$ et $b = -2$ ou $a = -2$ et $b = -8$.

11. On observe que $(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a+b)x + ab$. Donc pour factoriser $(x^2 - 10x + 16)$, il faut trouver a et b tels que $a + b = -10$ et $ab = 16$. D'après la question précédente $a = -8$ et $b = -2$ (ou l'inverse). Donc

$$x^2 - 10x + 16 = (x-8)(x-2).$$

12. D'après la question précédente, on sait que $(x^2 - 10x + 16)(x - 10) = (x - 8)(x - 2)(x - 10)$. Or $x - 8 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 8$. De même $x - 2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 2$ et enfin $x - 10 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 10$. On en déduit donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		2		8		10		$+\infty$
$x - 8$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x - 10$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-8)(x-2)(x-10)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

13. On cherche les valeurs négatives du produit c'est-à-dire lorsque x est dans l'ensemble solution suivant :

$$\mathscr{S} =]-\infty; 2] \cup [8; 10].$$

Notez qu'à part la borne $-\infty$, on retrouve l'ensemble de la question 5.

Partie III : vecteurs

14. Par lecture graphique, on obtient les coordonnées suivantes : $\vec{u}(1; -4)$, $\vec{v}(2; 1,6)$ et $\vec{w}(2; -1,6)$.
15. On se rappelle la formule du cours : pour $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$,

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Or $A(1; 7)$, $B(2; 3)$, $C(6; 2,4)$, $D(8; 4)$, $E(10; 4)$ et $F(12; 2,4)$. Donc en appliquant cette formule, on obtient

$$\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(2-1)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \\
CD &= \sqrt{(8-6)^2 + (4-2,4)^2} \\
&= \sqrt{2^2 + (1,6)^2} = \sqrt{4 + 2,56} = \sqrt{\frac{656}{100}} = \sqrt{\frac{164 \times 4}{25 \times 4}} = \frac{\sqrt{4 \times 41}}{5} = \frac{2\sqrt{41}}{5} \\
EF &= \sqrt{(12-10)^2 + (2,2-4)^2} = \sqrt{2^2 + (-1,6)^2} = \sqrt{4 + 2,56} = \frac{2\sqrt{41}}{5}.
\end{aligned}$$

Par définition, la norme $\|\vec{u}\|$ de $\vec{u}$ est égale à la distance AB. Donc

$$\|\vec{u}\| = AB = \sqrt{17}, \qquad \text{et} \qquad \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 2\sqrt{65}.$$

16. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{c} = \lambda\vec{v}$. Alors

$$(3; 2,4) = \lambda(2; 1,6) = (2\lambda; 1,6\lambda)$$

Donc

$$\begin{cases} 3 &= 2\lambda \\ 2,4 &= 1,6\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= \frac{3}{2} \\ \lambda &= \frac{2,4}{1,6} = \frac{24}{16} = \frac{3\times 8}{2\times 8} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Donc on trouve une unique valeur de $\lambda = 3/2$. Il est facile de vérifier que cette valeur fonctionne :

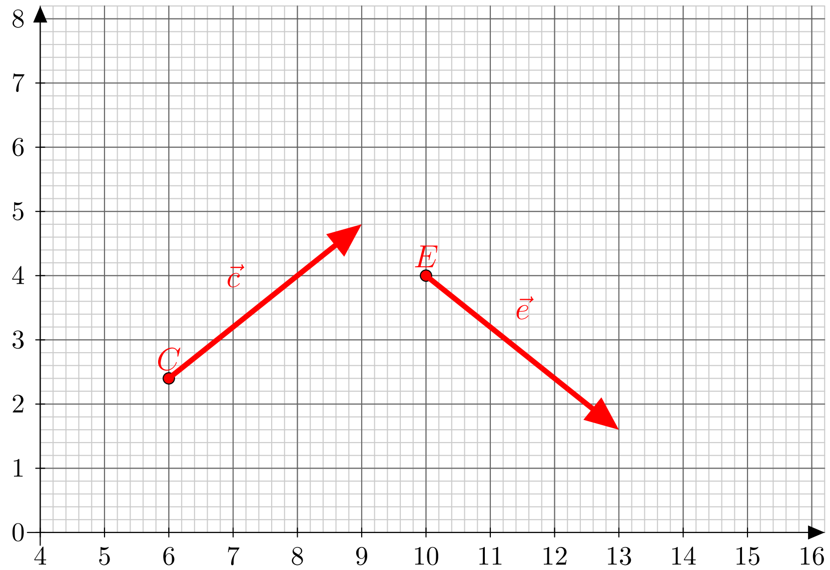
$$\frac{3}{2}\vec{v} : \frac{3}{2}(2;1,6) = \left(\frac{3}{2} \times 2; \frac{3}{2} \times 1,6\right) = (3; 3 \times 0,8) = (3; 2,4)\,.$$

Donc on a bien $\frac{3}{2}\vec{v} = \vec{c}$. Par définition, cette égalité signifie que $\vec{c}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

17. Les coordonnées du vecteurs $\vec{e}$ sont données par

$$\frac{3}{2} \times (2; -1,6) = \left(2 \times \frac{3}{2}; -1,6 \times \frac{3}{2}\right) = (3; -0,8 \times 3) = (3; -2,4)\,.$$

18.



Partie IV : statistique

19. En comptant les effectifs dans la table :

Vitesse (en km/h)	$[230; 235[$	$[235; 240[$	$[240; 245[$	$[245; 250[$	$[250; 255[$
Effectif	12	17	22	15	6

20. Pour la première classe on prend $\frac{230+235}{2} = 232,5$ comme représentant. De même pour les classes suivantes on prend $237,2$, $242,5$, $247,5$ et $252,5$ respectivement comme représentants. La moyenne est alors de :

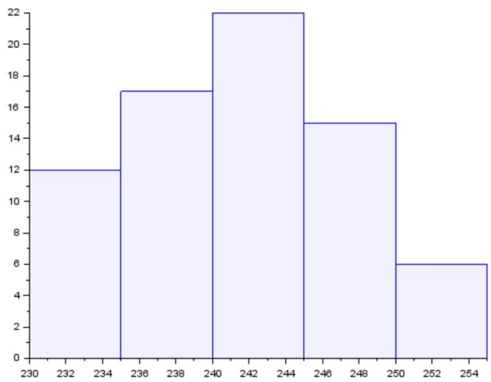
$$\begin{aligned} m &= \frac{232,5 \times 12 + 237,5 \times 17 + 242,5 \times 22 + 247,5 \times 15 + 252,5 \times 6}{72} \\ &= \frac{2790 + 4037,5 + 5335 + 3712,5 + 1515}{72} \\ &= \frac{17390}{72} \\ &\simeq 241,5\text{km/h} \end{aligned}$$

21. On a 72 résultats que l'on souhaite séparer en deux tas de même taille et donc deux tas de $\frac{72}{2} = 36$ records. On choisit donc la classe entre la 36ième et la 37ième valeur. Grâce aux effectifs cumulés :

Vitesse (en km/h)	$[230;235[$	$[235;240[$	$[240;245[$	$[245;250[$	$[250;255[$
Effectif	12	17	22	15	6
Effectif cumulé	12	29	51	66	72

on observe que la 36ième valeur et la 37ième valeur font partie de la même classe $[240;245[$ qui est donc la classe médiane.

22. L'histogramme associé au tableau est donné ci-dessous.



23. Puisque le nombre d'entraînements est de $n = 25 \geqslant 25$ et que la probabilité $p = 9/25 = 0,36$ est entre $0,2$ et $0,8$, il est d'après le cours légitime de construire un intervalle de fluctuation à 95%. Celui-ci est :

$$\begin{aligned}\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,36 - \frac{1}{\sqrt{25}}; 0,36 + \frac{1}{\sqrt{25}}\right] &= \left[0,36 - \frac{1}{5}; 0,36 + \frac{1}{5}\right] \\ &= [0,36 - 0,2; 0,36 + 0,2] \\ &= [0,16; 0,56] \,.\end{aligned}$$

Ainsi à 95%, le skieur a entre 16% et 56% de chances d'être parmi les 72 premiers records (d'obtenir une vitesse supérieur à $232,2$ km/h) le jour de la compétition.